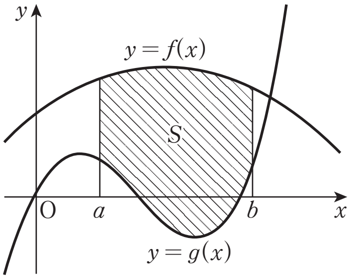
PART2 2曲線の間の面積

要点整理と公式

要点 ① 2曲線の間の面積

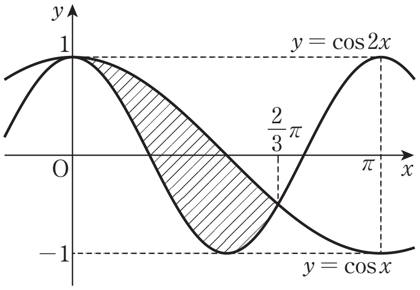
区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は



$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

で表される。

(ex) $0 \leqq x \leqq \pi$ において，2曲線 $y=\cos 2x$，$y=\cos x$ で囲まれた部分の面積 S を求める。



$\cos 2x=\cos x$ を解くと

$$2\cos^2 x-1=\cos x$$

$$2\cos^2 x-\cos x-1=0$$

$$(2\cos x+1)(\cos x-1)=0$$

$$\cos x=-\frac{1}{2},\ 1$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より $x=0,\ \dfrac{2}{3}\pi$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ において $\cos x$　　$\cos 2x$ であるから

$$S=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\qquad-\qquad)dx$$

$$=\left[\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

[MEMO]

2 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x}$, $4x+2y=9$

(2) $y=\sqrt{3}\sin x$, $y=\cos x$, $x=-\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{2}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

Point Pickup

2曲線の間の面積

区間 $[a, b]$ で常に $f(x)\geqq g(x)$ のとき，2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

第20講 PART2 確認問題

1 曲線 $y=\dfrac{6}{x}$ と直線 $2x+y=8$ で囲まれた部分の面積は，

$\boxed{ア}-\boxed{イ}\log\boxed{ウ}$ である。

2 $0 \leqq x \leqq \pi$ における曲線 $y=\sin x$，$y=-\cos x$ および2

直線 $x=0$，$x=\pi$ で囲まれた部分の面積は $\boxed{エ}$ である。

$\boxed{エ}$ は下の①～④のうちから選べ。

① $\sqrt{2}$　② $2\sqrt{2}$

③ $2\sqrt{2}+1$　④ $2\sqrt{2}+2$

PART2 2曲線の間の面積

2

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x}$，$4x+2y=9$

(2) $y=\sqrt{3}\sin x$，$y=\cos x$，$x=-\dfrac{\pi}{2}$，$x=\dfrac{\pi}{2}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

[解答]

(1) $y=\dfrac{1}{x}$ より $xy=1$ …… ①　　$4x+2y=9$ より $y=-2x+\dfrac{9}{2}$ …… ②

①，②より $x\left(-2x+\dfrac{9}{2}\right)=1$　　$4x^2-9x+2=0$　　$(4x-1)(x-2)=0$

よって，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ と直線 $4x+2y=9$ の

共有点の x 座標は $x=\dfrac{1}{4}$，2

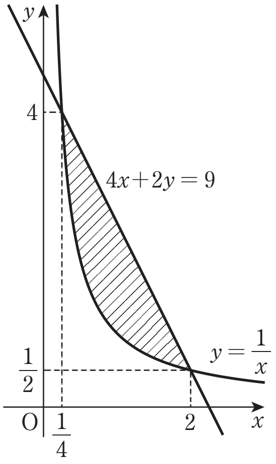
$\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq 2$ においては $-2x+\dfrac{9}{2}\geqq\dfrac{1}{x}$

よって $S=\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{2}\left\{\left(-2x+\frac{9}{2}\right)-\frac{1}{x}\right\}dx$

$=\left[-x^2+\dfrac{9}{2}x-\log|x|\right]_{\frac{1}{4}}^{2}$

$=(-4+9-\log 2)-\left(-\dfrac{1}{16}+\dfrac{9}{8}-\log\dfrac{1}{4}\right)$

$=\dfrac{63}{16}-3\log 2$



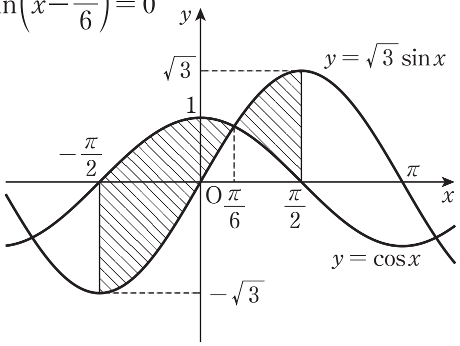
(2) $\sqrt{3}\sin x=\cos x$ より $\sqrt{3}\sin x-\cos x=0$　　$2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $-\dfrac{2}{3}\pi\leqq x-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{\pi}{3}$

よって $x-\dfrac{\pi}{6}=0$　より $x=\dfrac{\pi}{6}$

したがって，$y=\sqrt{3}\sin x$，$y=\cos x$ の

グラフは右図。



$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{6}$ においては $\cos x \geqq \sqrt{3}\sin x$

$\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ においては $\sqrt{3}\sin x \geqq \cos x$

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos x-\sqrt{3}\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{3}\sin x-\cos x)dx$$

$$=\left[\sin x+\sqrt{3}\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}+\left[-\sqrt{3}\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)-(-1+0)+(0-1)-\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)=4$$

第20講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：8，イ：6，ウ：3

[解説]

$y=\dfrac{6}{x}$ より，$xy=6$　……①

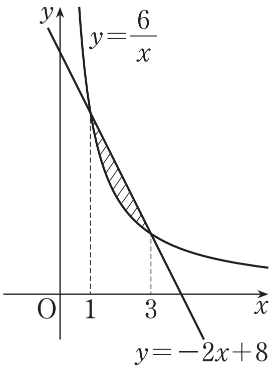
$2x+y=8$ より，$y=-2x+8$　……②

①，②より，$x(-2x+8)=6$ [A]

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

よって，曲線 $y=\dfrac{6}{x}$ と直線 $2x+y=8$ の共有点の x 座標は，$x=1$，3



$1\leqq x\leqq 3$ においては，$-2x+8\geqq\dfrac{6}{x}$

よって，求める面積は，

$$\int_1^3\left\{(-2x+8)-\frac{6}{x}\right\}dx$$ [B]

$$=\Big[-x^2+8x-6\log|x|\Big]_1^3$$

$$=(-9+24-6\log 3)-(-1+8)$$

$$=\mathbf{8-6\log 3}$$

[A]　曲線 $y=\dfrac{6}{x}$ と直線 $2x+y=8$ の共有点の x 座標を求める。

[B]　2曲線の間の面積
区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x)\geqq g(x)$ のとき，2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

2

[正解] エ：②

[解説]

$\sin x=-\cos x$ を解くと，

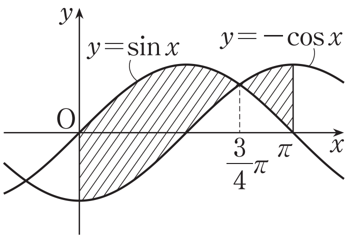
$$\sin x+\cos x=0 \quad \text{[C]}$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$0\leqq x\leqq\pi$ より，$\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$

よって，$x+\dfrac{\pi}{4}=\pi$ より，$x=\dfrac{3}{4}\pi$

したがって，$y=\sin x$，$y=-\cos x$ のグラフは，次の図のようになる。



$0\leqq x\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ においては，$\sin x\geqq-\cos x$

$\dfrac{3}{4}\pi\leqq x\leqq\pi$ においては，$-\cos x\geqq\sin x$

よって，求める面積は，

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\{\sin x-(-\cos x)\}dx+\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}(-\cos x-\sin x)dx \quad \text{[D]}$$

$$=\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(\sin x+\cos x)dx-\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}(\sin x+\cos x)dx$$

[E]

$$=\Big[-\cos x+\sin x\Big]_0^{\frac{3}{4}\pi}-\Big[-\cos x+\sin x\Big]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(-1)-\left\{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

$$=2\sqrt{2}$$

> [C]　2 曲線の共有点の x 座標を求める。

> [D]　$\left[0,\ \dfrac{3}{4}\pi\right]$ と $\left[\dfrac{3}{4}\pi,\ \pi\right]$ の区間に分けて，定積分の式をつくる。

> [E]　2 曲線の間の面積
> 区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x)\geqq g(x)$ のとき，2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた部分の面積 S は，
> $$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$